Ejercicios de Análisis Matemático I – Relación 4

Los puntos en los que se anula una función se llaman *ceros* de dicha función. Para estudiar cuántas soluciones tiene una ecuación de la forma $f(x) = g(x)$ donde f y g son funciones definidas y con derivadas de todos órdenes en un intervalo I (que a veces deberás elegir tú mismo), lo que se hace es estudiar cuántos ceros tiene la función $h(x) = f(x) - g(x)$.

Fundamentos teóricos.

La herramienta principal para calcular el conjunto de todos los valores que toma una función es el teorema del valor intermedio nos dice que la imagen de un intervalo por una función continua es un intervalo.

El teorema de los ceros de Bolzano, junto con el teorema de Rolle, permiten determinar en muchas ocasiones el número de ceros reales de una función.

El teorema de Bolzano nos dice que entre cada dos puntos en los que se produce un cambio de signo de una función continua en un intervalo hay ***por lo menos*** un cero de dicha función.

El teorema de Rolle nos dice que entre cada dos ceros de una función derivable en un intervalo hay ***por lo menos*** un cero de la derivada de dicha función.

Del teorema de Rolle deducimos que si una función se anula en n puntos, su derivada se anula en ***por lo menos*** $n-1$ puntos; su derivada segunda se anula en ***por lo menos*** $n-2$ puntos y, en general, su derivada de orden k, donde $k = 1, 2, ..., n-1$, se anula en ***por lo menos*** $n-k$ puntos.

Del teorema de Rolle deducimos también que si la derivada de una función se anula en exactamente k puntos, donde $k = 0, 1, 2, ...$, la función tiene ***como máximo*** $k+1$ ceros. Este resultado podemos aplicarlo *hacia atrás*, es decir, si sabemos, por ejemplo, que la derivada tercera se anula solamente en un punto, deducimos que la derivada segunda puede anularse ***como máximo*** en dos puntos, que la derivada primera puede anularse ***como máximo*** en tres puntos y que la función puede anularse ***como máximo*** en cuatro puntos.

Ceros de las funciones polinómicas. Se dice que **una función polinómica** $P(x)$ **tiene un cero de orden** $k \geqslant 1$ en un punto a, si el valor de P y el de sus derivadas hasta la de orden $k-1$ en a es cero, y la derivada de orden k de P no se anula en a. Los ceros de orden 1 se llaman **ceros simples**. El Teorema Fundamental del Álgebra dice que una función polinómica de grado n (en general, con coeficientes complejos) tiene n raíces reales o complejas *contando cada raíz tantas veces como indica su orden*. Recuerda también que las raíces complejas de un polinomio con coeficientes reales vienen por pares de raíces complejas conjugadas. Teniendo en cuenta que agrupando cada raíz compleja con su conjugada aparecen factores del tipo $x^2 + bx + c$, se deduce que:

a) Una función polinómica de grado impar tiene *contando cada raíz tantas veces como indica su orden* un número impar de raíces reales y sabemos que por lo menos tiene una.

b) Una función polinómica de grado par tiene *contando cada raíz tantas veces como indica su orden* un número par de raíces reales y puede ocurrir que no tenga ninguna.

Ejercicios

1. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, pongamos $M = \max f([a,b])$, $m = \min f([a,b])$ y supongamos que $f(a) = f(b)$ y que $m < f(a) < M$. Prueba que f toma todo valor de $]m, M[$ en al menos dos puntos de $[a,b]$.
2. Determina el número de ceros de la función: $f(x) = \mathrm{e}^x + x^3 - 6x - 2$.

3. Estudia el número de soluciones de la ecuación:

$$\cos x - \operatorname{sen} x + \frac{x^3}{2} - \frac{2}{3} = 0.$$

4. Determina el número de soluciones reales de la ecuación $2x^3 - 3x^2 - 12x = m$ según el valor del número real m.

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x) = \frac{2x^2 + 6x + 10}{x^2 + 1} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

   Estudia el número de soluciones reales de la ecuación $f(x) = m$ según el valor del número real m.

Para entregar el lunes 12 de noviembre.